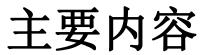
摄像机标定

2020年7月30日星期四

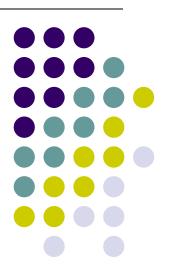




- 1、摄像机标定的定义
- 2、摄像机(有限射影)模型
- 3、基于DLT的相机标定
- 4、张正友的平面标定法
- 5、实验结果

摄像机标定

摄像机标定:建立摄像机图像像素位置与场景点位置之间的关系,其途径是根据摄像机模型,由已知特征点的图像坐标求解摄像机的模型参数。



相机标定的意义

- ▶畸变效应矫正
- >三维重建

所谓三维重建就是指从图象出发恢复出空间点三维坐标的过程。

一旦对摄像机完成了标定,就有能将现实物理世界中的点无歧义地投影到图像上。这意味着给定对于摄像机三维物理坐标框架下的位置,我们可以计算该三维点在成像仪中的坐标,即像素坐标。

欧氏坐标、齐次坐标



欧氏坐标

齐次坐标

二维点

(x,y)

(kx,ky,k)

k≠0

三维点

(x,y,z)

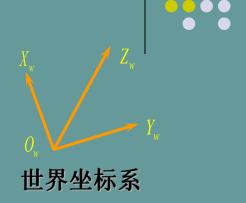
(kx,ky,kz,k)

摄像机模型——坐标系

、世界坐标系: X_w, Y_w, Z_w

、摄像机坐标系: X_c, Y_c, Z_c

、图像坐标系: [u,v] [x,y]



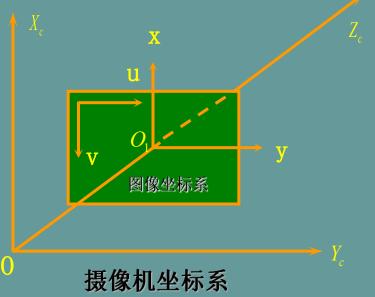
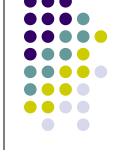
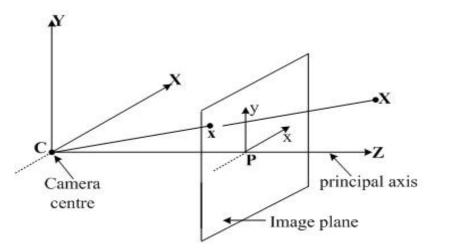


图1 坐标系图示

小孔成像模型





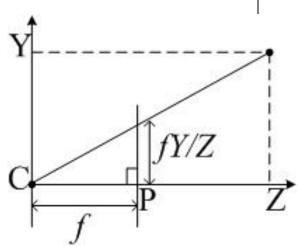


图2 小孔成像模型

其中,

投影中心称为摄像机中心,又称为光心,图中欧氏坐标系原点 \mathbb{C} 图像平面,又称聚焦平面,图中 $\mathbb{Z} = f$

主 轴:又称为主射线,摄像机中心到图像平面的垂线

主 点: 主轴与图像平面的交点

主平面: 过摄像机中心平行于图像平面的平面

小孔成像模型(中心投影)齐次表示



假定图像平面的坐标原点在主点上

$$(X,Y,Z)^{\mathrm{T}} \rightarrow (fX/Z, fY/Z)^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

即:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} f & & \\ & f & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} | \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



主点偏置的情形

假设主点的坐标 $(p_x,p_y)^T$,从世界坐标到图像平面的中心投影为

$$(X,Y,Z)^{\mathrm{T}} \rightarrow (fX/Z + p_{x}, fY/Z + p_{y})^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} fX + Z p_x \\ fY + Z p_y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & p_x & 0 \\ f & p_y & 0 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

若记:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & p_x \\ f & p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

则(2)式可以简记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}[\mathbf{I} | \mathbf{0}] \mathbf{X}_{cam} \cdot \cdots \cdot (3)$$

Xcam

摄像机固定在欧氏坐标系的原点,主轴沿着Z轴的指向,这样的坐标系称为摄像机坐标系。





空间点和摄像机坐标系采用不同的欧氏坐标系。如图3所示,两个坐标系通过旋转和平移相联系。如果世界坐标系中点 $\tilde{\mathbf{X}}$,在摄像机坐标系中表示为 $\tilde{\mathbf{X}}$ 。两者的联系可以表示为

$$\tilde{\mathbf{X}}_{cam} = \mathbf{R} \Big(\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{C}} \Big)$$

其中 $\tilde{\mathbf{C}}$ 表示摄像机中心在世界坐标系中的坐标, \mathbf{R} 表示摄像机坐标系的方向。

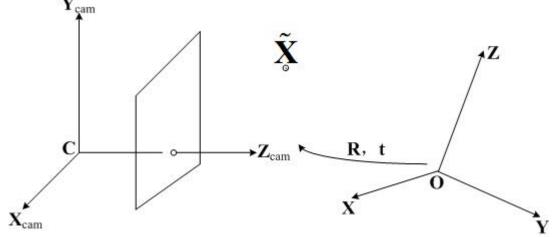


图3 摄像机坐标系与空间坐标系的关系

摄像机旋转平移情形的齐次表示



$$\mathbf{X}_{cam} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

代入(3)式可以简记为

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \mathbf{R} \left[\mathbf{I} \middle| -\tilde{\mathbf{C}} \right] \mathbf{X}$$

或者

$$\mathbf{x} = \mathbf{K} \left[\mathbf{R} \middle| \mathbf{t} \right] \mathbf{X}$$

其中
$$t=-R\tilde{C}$$

K: 标定矩阵(内参)

R、t: 摄像机方位、

位置(外参)





- 》如果图像坐标以像素来测量,CCD摄像机的像素不是正方形,设x和y方向上图像坐标单位距离的像素数分别为 m_x ` m_y 。
- > 标定矩阵的一般形式

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ & \alpha_y & y_0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

其中

s为扭曲参数, $\alpha_x = fm_x$, $\alpha_y = fm_y$, $x_0 = m_x p_x$, $y_0 = m_y p_y$





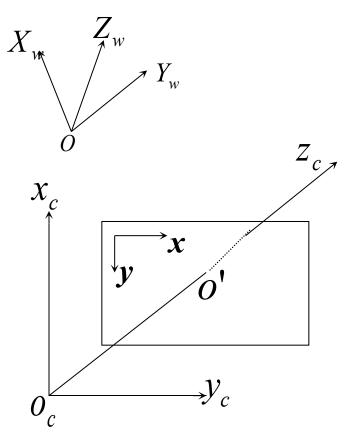


图4相机模型

世界坐标系和摄像机坐标系的关系

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} | \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中K

$$K = \begin{pmatrix} f_x, s, u_0 \\ 0, f_y, v_0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

实例分析(智能视频分析中庭相机参数)

- [图象中心]
- CX=340.000000
- CY=256.000000
- [像素距离]
- Pixeldx=0.009400
- Pixeldy=0.009400
- [旋转矩阵]
- r1=0.994389 r2=-0.105091 r3=-0.012136
- r4=-0.067451 r5=-0.541458 r6=-0.838017
- r7=0.081497 r8=0.834133 r9=-0.545509

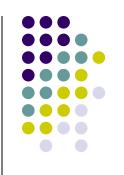
$$(2)Camera = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}$$

验证(1)**P**=

- [平移矩阵]
- TX=-17550.786495 TY=5751.607354 TZ=8284.527570
- [焦距]
- F=7.749594
- [摄象机世界坐标]
- CamaraX= 17165.091991,CamaraY= -5640.569533,
- CamaraZ= 9126.230497
- [投影矩阵]
- P[0]= 847.507577,P[1]= 196.966007,P[2]= -195.478185,
- P[3]= -11652566.092916,P[4]= -34.745108,P[5]= -232.853674,
- P[6]= -830.532580,P[7]= 6862607.396956,P[8]= 0.081497,
- P[9]= 0.834133,P[10]= -0.545509,P[11]= 8284.527570



摄像机标定方法分类



- 传统摄像机标定方法
- DLT方法
- RAC方法
- 张正友的平面标定方法(ICCV, 1999)
- 孟胡的平面圆标定方法(PR, 2003)
- 吴毅红等的平行圆标定方法(ECCV, 2004))
- 主动视觉摄像机标定方法
- 摄像机自标定方法

1. 传统的摄像机标定方法

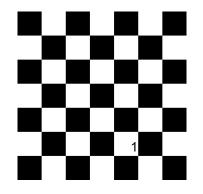
利用已知的景物结构信息。常用到标定块。

优点

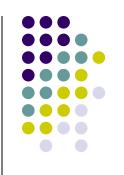
可以使用于任意的摄像机模型,标定精度高不足

标定过程复杂,需要高精度的已知结构信息。 在实际应用中很多情况下无法使用标定块。









• 特点

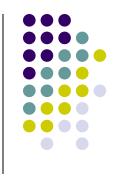
己知摄像机的某些运动信息

• 优点

通常可以线性求解,鲁棒性比较高

• 不足

不能使用于摄像机运动未知和无法控制的场合



3. 摄像机自标定方法

• 特点

仅依靠多幅图像之间的对应关系进行标定

• 优点

仅需要建立图像之间的对应,灵活性强,潜在 应用范围广。

• 不足

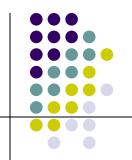
非线性标定,鲁棒性不高





Abdal-Aziz和Karara于70年代初提出了直接 线性变换像机定标的方法,他们从摄影测量 学的角度深入的研究了相机图像和环境物体 之间的关系,建立了相机成像几何的线性模 型,这种线性模型参数的估计完全可以由线 性方程的求解来实现。

DLT变换

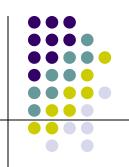


直接线性变换是将像点和物点的成像几何关系在齐次坐标下写成透视投影矩阵的形式:

$$S\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = P_{3\times 4} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中(u,v,1) 为图像坐标系下的点的齐次坐标, (X_w,Y_w,Z_w) 为世界坐标系下的空间点的欧氏坐标, (X_w,Y_w,Z_w) 为来知尺度因子(深度因子)。

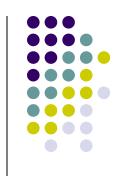
DLT变换



消去 s? 可以得到方程组:

$$\begin{aligned} p_{11}X_w + p_{12}Y_w + p_{13}Z_w + p_{14} - p_{31}uX_w - p_{32}uY_w - p_{33}uZ_w - p_{34}u &= 0 \\ p_{21}X_w + p_{22}Y_w + p_{23}Z_w + p_{24} - p_{31}vX_w - p_{32}vY_w - p_{33}vZ_w - p_{34}v &= 0 \end{aligned}$$





• 以 P^{iT} 表示矩阵P的第i行的行向量,根据向量(u,v,1)^T与($P^{iT}X,P^{2T}X,P^{3T}X$)^T平行,其中 $X = (X_w,Y_w,Z_w,1)^T$,利用叉积运算去掉深度因子 Z_c ,得到

$$\begin{cases} P^{1T}X - uP^{3T}X = 0 \\ P^{2T}X - vP^{3T}X = 0 \\ uP^{2T}X - vP^{1T}X = 0 \end{cases}$$





DLT变换



当已知N个空间点和对应的图像上的点时,可以得到一个含有2*N个方程的方程组:

$$AL=0$$

其中 A为(2N*12) 的矩阵,L 为透视投影矩阵元素组成的 向量 $[p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34}]^T$ 。

如何求解非零解L?

DLT变换

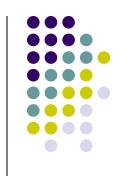


基于DLT的相机标定的任务就是寻找合适的 L,使得 $\|\mathbf{AL}\|$ 为最小,并满足 $\|L\|$ = 1。

$$\min_{\mathbf{L}} \| \mathbf{A} \mathbf{L} \| \quad s.t. \| \mathbf{L} \| = 1$$

求解:对A做奇异值分解,A=UDVT,L是V的最后一列。

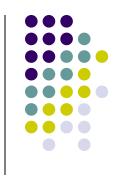


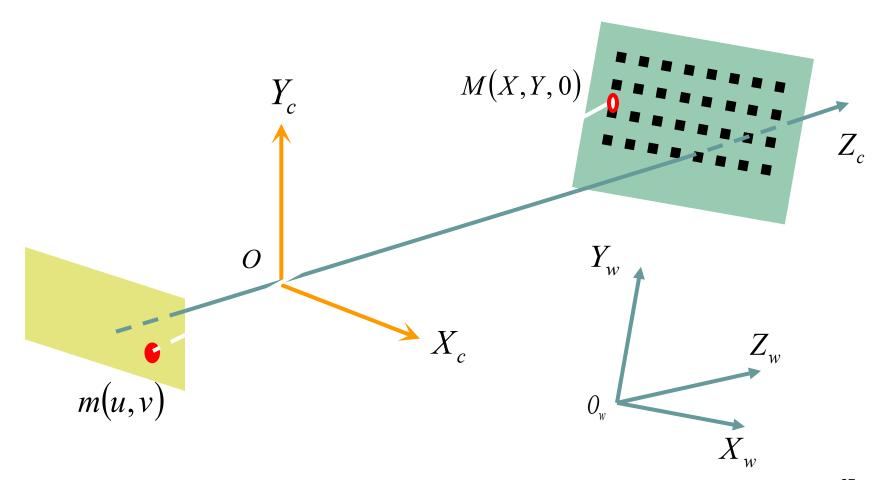


张正友的平面标定方法是介于传统标定方法和自标定方法之间的一种方法。它既避免了传统方法设备要求高,操作繁琐等缺点,又较自标定方法精度高,符合办公、家庭使用的桌面视觉系统(DVS)的标定要求。

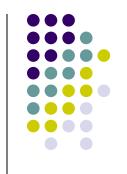
张的方法的缺点是需要确定模板上点阵的物理坐标以及图像 和模板之间的点的匹配,这给不熟悉计算机视觉的使用者带 来了不便。

张正友的平面标定方法









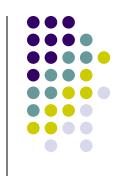
$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 在这里假定模板平面在世界坐标系Z=0的平面上
- 其中,K为摄像机的内参数矩阵, $\widetilde{M} = [XY1]^T$ 为模板平面上点的齐次坐标, $\widetilde{m} = [uv1]^T$ 为模板平面上点投影到图象平面上对应点的齐次坐标, $[r_1 r_2 r_3]$ 和 t分别是摄像机坐标系相对于世界坐标系的旋转矩阵和平移向量

张正友方法

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3] = s \ \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}]$$

或



$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{S} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{S} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2$$

根据旋转矩阵的性质,即 $\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ 和 $\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = 1$,每幅图象可以获得以下两个对内参数矩阵的基本约束

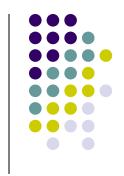
$$\begin{cases} \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases}$$
(1)





• 经过上面的分析,根据模板 (X_i,Y_i) 和实拍图像 (x_i,y_i) 的点对,求出单应矩阵 \mathbf{H} 。

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_i X_i & -x_i Y_i & -x_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & 1 & -y_i X_i & -y_i Y_i & -y_i \end{bmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}$$

其中标定矩阵

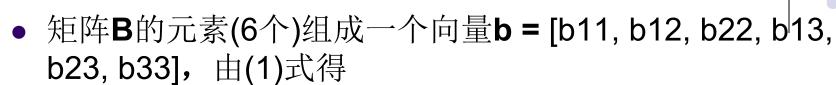
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & u_0 \\ f_y & v_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而B具有通用形式的解

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x^2} & 0 & -\frac{u_0}{f_x^2} \\ 0 & \frac{1}{f_y^2} & -\frac{v_0}{f_y^2} \\ -\frac{u_0}{f_x^2} & -\frac{v_0}{f_y^2} & \frac{c_x^2}{f_x^2} + \frac{c_y^2}{f_y^2} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & u_0 \\ f_y & v_0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \end{cases}$$
(1)

矩阵B的确定



$$\mathbf{h}_{i}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{h}_{j} = \mathbf{v}_{ij}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

其中

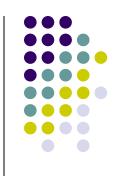
$$\mathbf{v}_{ij} = \left[h_{i1}h_{j1}, h_{i1}h_{j2} + h_{i2}h_{j1}, h_{i2}h_{j2}, h_{i3}h_{j1} + h_{i1}h_{j3}, h_{i3}h_{j2} + h_{i2}h_{j3}, h_{i3}h_{j3} \right]^{\mathrm{T}}$$
(1) 式修改为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

K个棋盘图像,堆叠成线性方程组

$$Vb=0$$
 (2)

求解(2),方程解为 \mathbf{b} =[B_{11} , B_{12} , B_{22} , B_{13} , B_{23} , B_{33}]^T



求解相机内参

求解相机外参

$$r_1 = \frac{1}{s}K^{-1}h_1$$
 $r_2 = \frac{1}{s}K^{-1}h_2$
 $r_3 = r_1 \times r_2$
 $t = \frac{1}{s}K^{-1}h_3$
比例系数s由 $||r_1|| = 1$ 确定 $s = ||K^{-1}h_1||$





$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_0 = (B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)$$

$$\lambda = B_{33} - [B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})]/B_{11}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda/B_{11}}$$

$$\beta = \sqrt{\lambda B_{11}/(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}$$

$$\gamma = -B_{12}\alpha^2\beta/\lambda$$

$$u_0 = \gamma v_0/\beta - B_{13}\alpha^2/\lambda$$
.

考虑镜头畸变

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_1 x_d y_d + p_2 (r^2 + 2x_d^2) \\ p_1 (r^2 + 2y_d^2) + 2p_2 x_d y_d \end{bmatrix}$$
 点真实位置 切向畸变 (测量值)



输入: 畸变坐标 x、y

相机参数 f_x 、 f_y 、 c_x 、 c_y

畸变系数 k_1 、 k_2 、 p_1 、 p_2

输出:矫正坐标 x'、y'

1. 坐标归一化:
$$x_0 = \frac{x - c_x}{f}, y_0 = \frac{y - c_y}{f}$$

2. 径向畸变中间变量:
$$r_1 = x_0^2 + y_0^2, r_2 = r_1^2$$

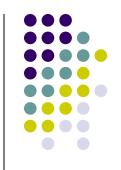
$$d = \frac{1}{1 + k_1 r_1 + k_2 r_2}$$

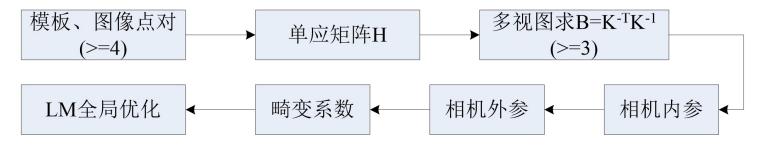
3. 切向畸变:
$$\Delta x = 2p_1x_0y_0 + p_2(r_1 + 2x_0^2)$$
$$\Delta y = p_1(r_1 + 2y_0^2) + 2p_2x_0y_0$$

4. 归一化矫正坐标:
$$x_u = (x_0 - \Delta x) \cdot d$$
 $y_u = (y_0 - \Delta y) \cdot d$

5. 矫正坐标:
$$x' = f_x x_u + c_x$$
$$y' = f_y y_u + c_y$$

基于张正友相机标定的总体思路





$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left\| \mathbf{x}_{ij} - \tilde{m} \left(\mathbf{K}, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, \mathbf{R}_i, \mathbf{t}_i, \mathbf{X}_{ij} \right) \right\|^2$$

其中:

n:视图数目

m:特征点数

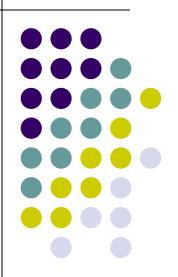
 \mathbf{x}_{ij} :第i视图第j特征点

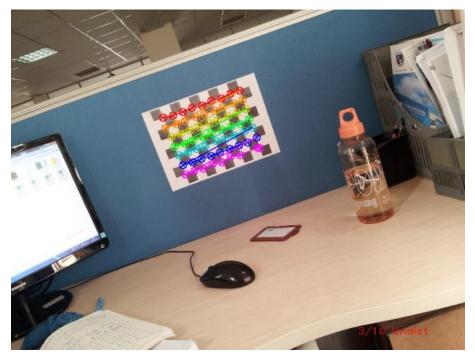
 \tilde{m} :世界点 X_{ii} 在第i视图中投影变换

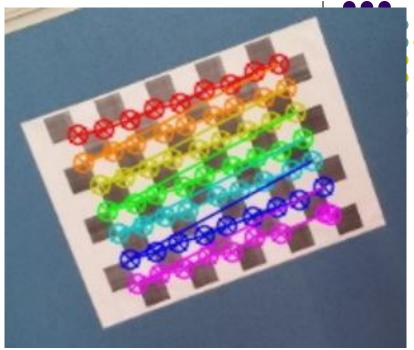
基于OpenCV的相机标定

参数输入

参数输出





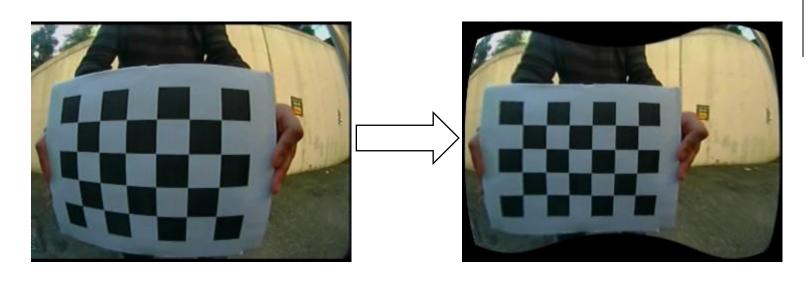


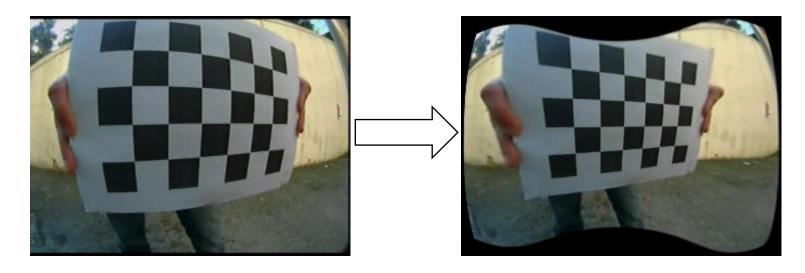
```
<Camera Matrix type id="opency-matrix">
 <rows>3</rows>
<cols>3</cols>
< dt > d < / dt >
<data>
 6.3676515560716837e+002 0. 3.1640435810258293e+002
     6.3983001557392299e+002 2.9924798412428726e+002
 0.
</data></Camera Matrix>
<Distortion Coefficients type id="opency-matrix">
<rows>5</rows>
<cols>1</cols>
<dt>d</dt>
<data>
  6.5154539972828163e-002 2.3548926598684337e+000
  3.7683999267504924e-002 -5.0109939228735988e-003
  -1.4737820241850818e+001
</data></Distortion Coefficients>
<Extrinsic Parameters type id="opency-matrix">
 <rows>8</rows>
<cols>6</cols>
<dt>d</dt>
<data>
  2.4110176870910907e-001
                                  -1.2218367949131897e-001
  -1.6007902953416351e+000
                                  -8.0694128074891375e+002
  1.4497631898081264e+002
                                  3.4636781658902582e+003
```



去畸变的实例







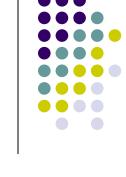












20140301_155815.jpg













20140301_155954.jpg

20140301_160000.jpg



20140301_160016.jpg



20140301_160021.jpg

20140301_155946.jpg













20140301_160055.jpg

20140301_160106.jpg

20140301_155850.jpg







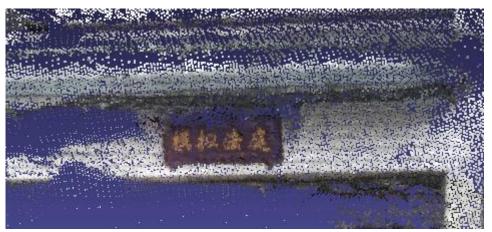


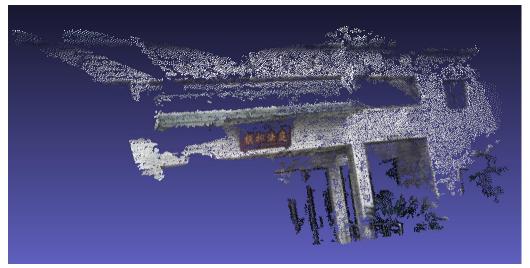












谢 谢~

